## Exercice n° 1

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ : $z^2-(2^{\theta+1}\cos\theta)z+2^{2\theta}=0$ ($\theta$ est un réel donné)
2) Soit A et B les points d'affixes les racines de l'équation précédente dans un plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$
   Déterminer $\theta$ pour que le triangle OAB soit équilatéral

## Exercice n° 2



Soient $z_1=\sqrt{2}(1+i)$, $z_2=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$ et $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$

1) Déterminer la forme algébrique de Z
2) a) Déterminer une forme exponentielle de $z_1$ et $z_2$
   b) Déterminer une forme exponentielle de Z
3) a) En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$
   b) Déterminer alors $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$

## Exercice n° 3

**Partie A**

On considère le polynôme $P(z)$ de la variable complexe z : $P(z)=z^3+2(1-i)z^2+2(1-2i)z-4i$

1) Calculer $P(i)$ et $P(\sqrt{2})$
2) Déterminer le réel y tel que iy soit solution de l'équation $P(z)=0$
3) En déduire une factorisation de $P(z)$
4) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes $P(z)=0$

**Partie B**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

1) Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=-1+i$, $z_B=-1-i$ et $z_C=2i$
2) Déterminer l'affixe du point D définie par $\overrightarrow{OD}=-2\overrightarrow{OA}$ puis placer D
3) Montrer que l'affixe du milieu I de $[CD]$ est $z_I=1$
4) a) Calculer les nombres complexes $\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_A}$ et $\dfrac{z_C-z_B}{z_D-z_B}$
   b) Calculer le module et un argument de ces deux nombres
   c) En déduire la nature des triangles ACD et BCD
   d) Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer $\mathscr{C}$

## Exercice n° 4

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^3+8=0$ (On pourra remarquer qu'il y a une racine réelle)
   Donner les solutions de $(E)$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique
2) On note A, B et C les images des solutions de $(E)$ dans le plan complexe. Placer les points A, B et C dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ et démontrer que le triangle ABC est équilatéral

## Exercice n° 5 BAC

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): 2z^2+(7+i\sqrt{3})z-4(1-i\sqrt{3})=0$
   a) Montrer que $(E)$ admet une solution réelle que l'on déterminera.
   b) Donner l'autre solution de $(E)$
2) a) Calculer $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)^2$
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E'): 2z^4+(7+i\sqrt{3})z^2-4(1-i\sqrt{3})=0$
3) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et

B d'affixes respectives $z_A = 2i$ et $z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ et on désigne par I le milieu du segment [OA]

a) Ecrire $z_B$ sous forme exponentielle

b) Placer I et B et montrer que le triangle OIB est isocèle

## Exercice n° 6 BAC

1) Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}+i$ et $2i$. Montrer que le quadrilatère OACB est un losange

2) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 2iz - 4 = 0$

a) Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de $(E)$

3) Soit $P(z) = z^3 - 4iz^2 - 8z + 8i$

a) Vérifier que $P(2i) = 0$

b) Déterminer les nombres complexes m et p tels que $P(z) = (z-2i)(z^2+mz+p)$

c) Résoudre alors l'équation $P(z) = 0$

## Exercice n° 7

**Partie A**

1) Vérifier que $(3+i)$ est une racine carrée complexe de $(8+6i)$

2) On considère l'équation $(E): z^3 - (1+4i)z^2 - 3z - 1 - 8i = 0$

a) Vérifier que $(-i)$ est une racine de $(E)$

b) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que :

$$z^3 - (1+4i)z^2 - 3z - 1 - 8i = (z+i)(az^2 + bz + c)$$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+5i)z - 8 + i = 0$

4) Résoudre $(E)$

**Partie B**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm). On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_1 = 2+3i$, $z_2 = -1+2i$, $z_3 = -i$ et $z_4 = 3$

1) Placer A, B, C et D dans le plan complexe

2) Soit $Z = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$

a) Interpréter géométriquement le module et l'argument de Z

b) Ecrire Z sous forme algébrique et exponentielle

c) En déduire la nature du triangle ABC et une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$

3) Montrer que ABCD est un carré

## Exercice n° 8

I. On considère la fonction f de la variable complexe z définie par :

$$f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i$$

1) Vérifier que $f(z) = (z-2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$ . Ecrire les solutions sous formes algébriques et exponentielles.

II. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $z_3 = 2i$

1) Représenter dans le plan complexe les points $M_1$, $M_2$ et $M_3$ d'affixes $z_1$, $z_2$ et $z_3$ puis montrer qu'ils sont sur un même cercle de centre O

2) Calculer $z_2 - z_1$ et $z_2 - z_3$ . Démontrer que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est un losange

## Exercice n° 9

On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$

1) Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$, puis montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait $P(z) = (z^2+3)Q(z)$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$

3) Placer dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A=i\sqrt{3}$ , $z_B=-i\sqrt{3}$ , $z_C=3+2i\sqrt{3}$ et $z_D=\overline{z_C}$ puis montrer que ces points appartiennent à un même cercle

4) On note E le symétrique de D par rapport à O. Montrer que $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ puis déterminer la nature du triangle BEC

## Exercice n° 10

1) Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z)=z^4-1$
   a) Factoriser $P(z)$
   b) En déduire les solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes de l'équation $P(z)=0$
   c) Déduire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4=1$$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 5 cm)
   a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives: $a=-2$ , $b=-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$ et $c=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$
   b) Démontrer que les points O, A, B et C sont situés sur un cercle, que l'on déterminera.
3) Placer le point D d'affixe $d=-0,5$
   a) Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par: $z'=\dfrac{a-c}{d-c}$
   b) En déduire le rapport $\dfrac{CA}{CD}$. Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z'?

## Exercice n° 11

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1cm).

1) On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $(E)$ d'inconnue z suivante :

$$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0$$

   a) Montrer que i est une solution de $(E)$
   b) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :

$$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(az^2+bz+c)$$

   c) Résoudre l'équation $(E)$ dans l'ensemble des nombres complexes.
2) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $a=4+i$, $b=4-i$ et $c=-i$
   a) Faire une figure
   b) Montrer que le triangle ABC est rectangle en B
   c) Déterminer l'affixe de $\Omega$ milieu du segment $[AC]$
3) Soit D le point d'affixe $d=3-2i$. Montrer que A, B, C et D appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon



## Exercice n° 12

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les deux équations suivantes :
   a) $z^2-2z+5=0$
   b) $z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3}=0$
2) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A, B, C, et D d'affixes respectives : $z_A=1+2i$ , $z_B=1+\sqrt{3}+i$, $z_C=1+\sqrt{3}-i$ et $z_D=1-2i$
   a) Placer A, B, C, D et préciser la nature du quadrilatère ABCD
   b) Vérifier que $\dfrac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=i\sqrt{3}$. Que peut-on en déduire pour les droites $(AB)$ et $(BD)$ ?
   c) Prouver que les quatre points A, B, C et D appartiennent à un même cercle $\Gamma$ dont on précisera le centre et le rayon, Tracer $\Gamma$
3) On considère l'équation $(1): z^2-2(1+2\cos\theta)z+5+4\cos\theta=0$ où $\theta$ désigne un réel quelconque
   a) Résoudre $(1)$ dans $\mathbb{C}$

b) Montrer que les images des solutions de $(1)$ appartiennent au cercle $\Gamma$

## Exercice n° 13

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-4z+8=0$. On notera $z_1$ et $z_2$ les solutions de cette équation, $z_1$ ayant sa partie imaginaire positive
2) Déterminer le module et un argument de $z_1$ et $z_2$
3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A=2+2i$, $z_B=2-2i$, $z_C=2+2\sqrt{3}$ et $z_D=2+2\sqrt{3}+4i$
   a) Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe
   b) Calculer les longueurs AB, AC et BD. Quelle est la nature du triangle ABC ?
   c) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$
   d) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

## Exercice n° 14

I. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 4cm).
   1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+2z\sqrt{3}+4=0$
   2) Ecrire les solutions sous forme trigonométrique

II. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $a=2i$, $b=i-\sqrt{3}$ et $c=-\sqrt{3}-i$
   1) Placer les points A, B et C sur une figure
   2) Soit $Z=\dfrac{a-b}{c-b}$
      a) Interpréter géométriquement le module et un argument de Z
      b) Ecrire Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique
      c) En déduire la nature du triangle ABC ainsi qu'un mesure de $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$



## Exercice n° 15

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1cm). On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $(E)$ d'inconnue z suivante :

$$z^3-(5+3i)z^2+(5+4i)z-1-7i=0$$

**Partie A : Résolution de l'équation (E)**

1) Vérifier que $(3+4i)$ est une racine carrée de $(-7+24i)$
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(5+2i)z+7-i=0$
3) Vérifier que i est une solution de $(E)$
4) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que :
$$z^3-(5+3i)z^2+(5+4i)z-1-7i=(z-i)(az^2+bz+c)$$
5) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$

**Partie B**

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=i$, $z_B=4+3i$ et $z_C=1-i$
1) Placer A, B et C sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice
2) Montrer que ABC est un triangle rectangle en A
3) Soit $\mathscr{C}_{(\Omega,r)}$ le cercle circonscrit au triangle ABC
   a) Montrer que $\Omega$ est le point d'affixe $z_\Omega=\dfrac{5}{2}+i$
   b) Déterminer r
4) Soit D le point d'affixe $z_D=5+i$
5) Montrer que $D\in\mathscr{C}$
6) Montrer que ABDC est un rectangle